# Μάθημα 11ο

## • Διαγράμματα Φάσης

Για τη πλήρη μελέτη της κίνησης ενός υλικού σημείου (σε μία διάσταση για παράδειγμα) χρειάζεται να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t)$ που σε γενικά είναι δύσκολο ή αδύνατο να λυθούν. Σκοπός μας θα είναι να μελετήσουμε την κίνηση και τα χαρακτηριστικά της χωρίς να λύσουμε τέτοιου είδους εξισώσεις.

Έστω ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του υλικού σημείου όπως αυτή προκύπτει από τον 2ο Νόμο του Newton είναι της μορφής

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t)$$

Γράφουμε την εξίσωση σε μορφή συστήματος θέτοντας $\boxed{y = \dot{x}}$, άρα:

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \ddot{x} = (\dot{\dot{x}}) = f(x,\dot{x}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x,y) \end{cases}$$

Το σύστημα δεν περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή (όπως και η εξίσωση) και καλείται αυτόνομο.

Γενικά τα συστήματα είναι της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$$

Γενικά οι $F, G$ διαφορίσιμες με συνεχή παράγωγο σε κάποια περιοχή του επιπέδου $xy$.

Υπάρχουν λύσεις του συστήματος για τις οποίες το σύστημα είναι μηδέν $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$

Συνεπώς και $\begin{cases} \dot{x}=0 \\ \dot{y}=0 \end{cases}$ και άρα το σύστημα δεν εξελίσσεται δυναμικά.

Οι λύσεις λύσεις του συστήματος είναι οι σταθερές που ικανοποιούν το αλγεβρικό σύστημα $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$

<u>Ορισμός:</u>

Ένα σημείο $(x_0,y_0)$ ή $(x^*,y^*)$ του συστήματος $\begin{cases} \dot{x}=F(x,y) \\ \dot{y}=G(x,y) \end{cases}$ για το οποίο $F(x_0,y_0)=G(x_0,y_0)=0$

καλείται κρίσιμο σημείο και η αντίστοιχη λύση, λύση ισορροπίας.

Οι λύσεις του συστήματος $x=x(t)$ και $y=y(t)$ ορίζουν μία παραμετρική καμπύλη στο επίπεδο $xy$, όπου κάθετος άξονας είναι ο $y$ και οριζόντιος ο $x$. Το επίπεδο αυτό καλείται χώρος των φάσεων. Επειδή για κάθε χρονική στιγμή $t$, ορίζεται ένα σημείο $(x,y)$ στο χώρο των φάσεων που δηλώνει τη θέση και τη ταχύτητα του υλικού σημείου. Για να βρούμε αυτό το χώρο πρέπει να λύσουμε μία εξίσωση:

- $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}} \rightsquigarrow \text{1ης τάξης εξίσωση}$$

Παράδειγμα

- Το σύστημα $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -ky \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

1ος Τρόπος

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -ky \end{cases}$ και έχουμε:

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} \\ y = c_2 e^{-kt} \end{cases} \Rightarrow y = c_2 (e^{-t})^k \Rightarrow y = c_2 \left(\frac{x}{c_1}\right)^k$$

$$\Rightarrow y = \frac{c_2}{c_1^k} x^k \Rightarrow \boxed{y = c x^k}$$

2ος Τρόπος:

Λύνω τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{G}{F}=\frac{-ky}{-x}=\frac{ky}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=k\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y=k\ln x+c\Rightarrow y=e^{k\ln x}e^{c}\Rightarrow\boxed{y=\tilde{c}x^{k}}$$

• Τι περιγράφουν οι καμπύλες αυτές:

Τα σταθερά σημεία της εξίσωσης είναι προφανώς $x_0=y_0=0$

1η Περίπτωση: $k>0$

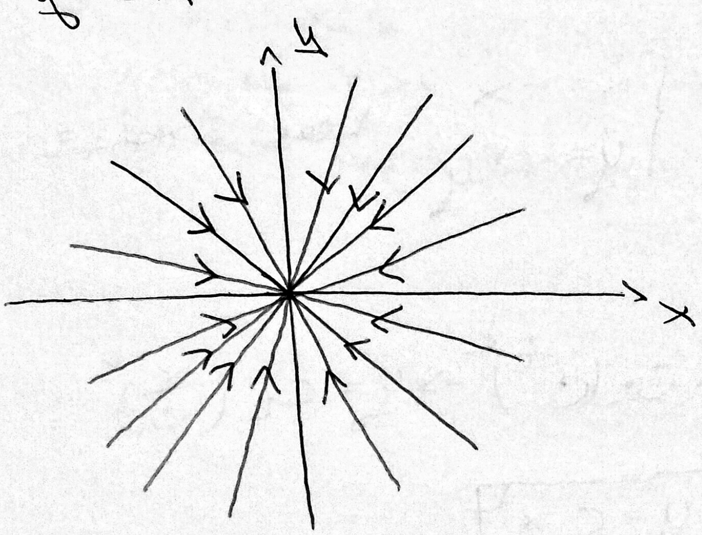
Παρατηρούμε για κάθε $k>0$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=0$$

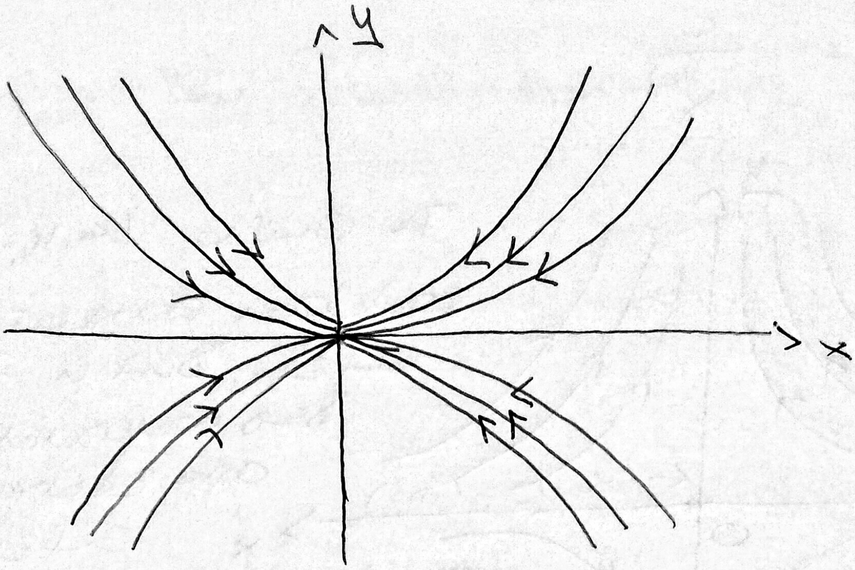
Δηλαδή η λύση τείνει πάντα προς το κρίσιμο σημείο. Το σημείο αυτό καλείται σημείο συσσώρευσης.

Π.χ.

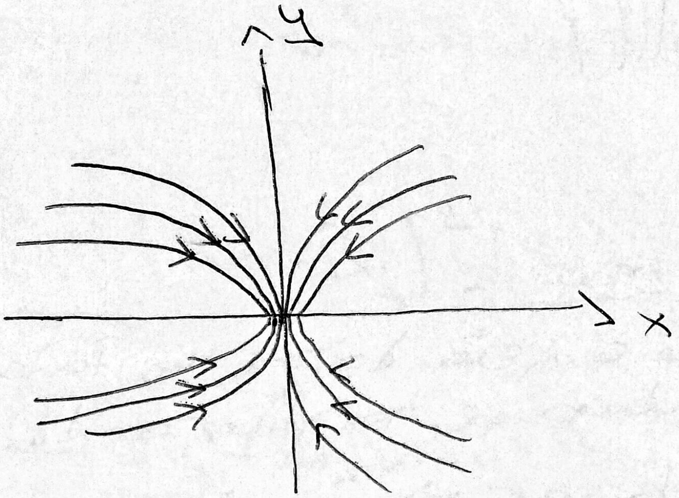
$\boxed{k=1}$: $y=cx$



Γενικά, $\kappa > 1$:



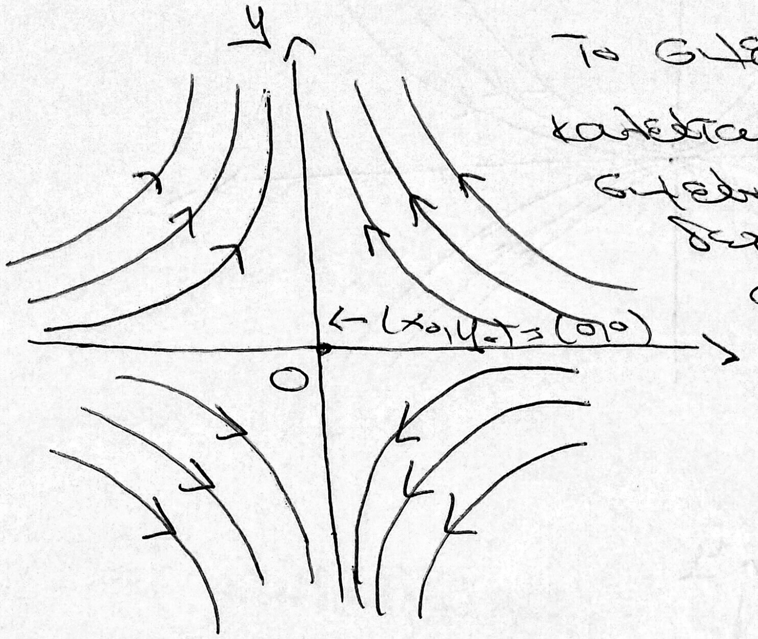

Για $0 < \kappa < 1$:




Το σημείο αυτό, δηλ. $(x_0, y_0)$ καλείται κόμβος όταν οι διανυσματικές γραμμές έχουν φορά προς αυτό το σημείο και πηγή όταν οι διανυσματικές γραμμές έχουν φορά εκτός του σημείου

2η Περίπτωση: $k=-|k|<0$

άρα $y = c\,x^{-|k|} = \dfrac{c}{x^{|k|}}$




Το σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$ καλείται σαγματικό σημείο, διότι η λύση δεν περνάει ποτέ από εκείνο το σημείο.

## Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m. Ταλαντώνεται σε ένα ελατήριο σύμφωνα με τον νόμο του Hooke:

$$m\ddot{x}=-kx \Rightarrow m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=0,\ \omega^2=k/m \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι:

$$x=x(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

$$x\sim e^{pt}$$

$$p^2+\omega^2=0 \Rightarrow p=\pm\omega$$

$$x=A\underbrace{e^{\omega t}}_{\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)}+B\underbrace{e^{-i\omega t}}_{\cos(\omega t)-i\sin(\omega t)}$$

$y = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$

$\Rightarrow y = \dot{x}(t) = -B\omega\sin(\omega t) + A\omega\cos(\omega t)$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B\omega & A\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega(A^2+B^2)}\begin{pmatrix} A\omega & -B \\ B\omega & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Γνωρίζω ότι $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$

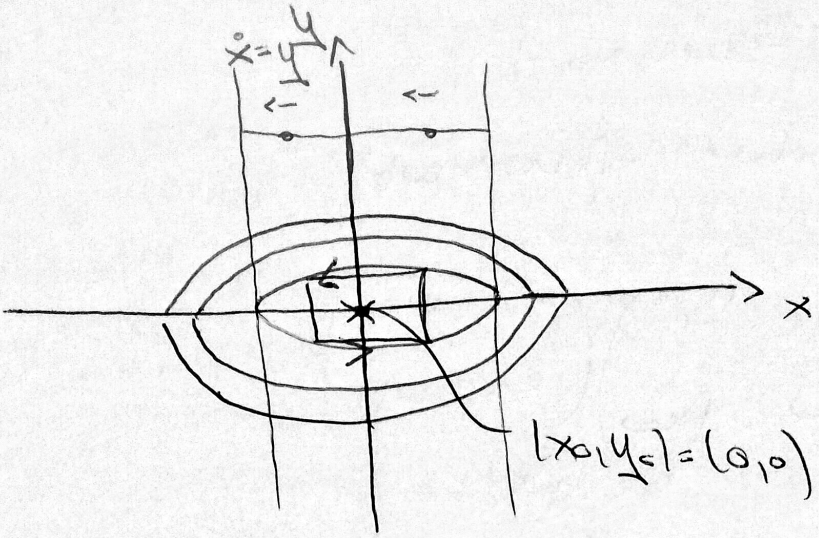
$$\frac{1}{\omega^2(A^2+B^2)^2}\left[(A\omega x - By)^2 + (B\omega x + Ay)^2\right] = 1$$

$$\underline{A^2\omega^2x^2} + B^2y^2 \cancel{- 2AB\omega xy} + \underline{B^2\omega^2x^2} + A^2y^2 \cancel{+ 2AB\omega xy} = \omega^2(A^2+B^2)^2$$

- $\Rightarrow \omega^2(\cancel{A^2+B^2})x^2 + (\cancel{A^2+B^2})y^2 = \omega^2(A^2+B^2)^{\cancel{2}}$

$$\iff \boxed{x^2 + \frac{1}{\omega^2}y^2 = A^2 + B^2}$$

Άρα ο φασικός χώρος είναι <u>ελλείψεις</u>. Δηλαδή κλειστές τροχιές γύρω από ένα κέντρο




Κλειστές τροχιές στο χώρο των φάσεων αντιστοιχούν σε ταλάντωση γύρω από ένα σταθερό σημείο, που είναι το κέντρο της κλειστής τροχιάς και το κρίσιμο σημείο του συστήματος.

Η εξίσωση $\ddot{x}+\omega^2 x=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x}=y\\ \ddot{x}=-\omega^2 x \Rightarrow \dot{y}=-\omega^2 x\end{cases}$

<u>Δηλαδή</u>: $\begin{cases}\dot{x}=y=F\\ \dot{y}=-\omega^2 x=G\end{cases}$

Σταθερό/Κρίσιμο Σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{G}{F}=\frac{-\omega^2 x}{y} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-\omega^2 x}{y}} \Leftrightarrow$$

$$y\,dy+\omega^2 x\,dx=0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}y^2}_{\text{κινητική}}+\underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 x^2}_{\text{δυναμική}}=C$$

Για $t=0$: $\begin{cases}x(0)=X_0\\ y(0)=\dot{x}(0)=V_0\end{cases}$

Δηλαδή: $C=\frac{1}{2}V_0^2+\frac{1}{2}\omega^2 X_0$

Λύση:

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2=\frac{1}{2}v_0^2+\frac{1}{2}\omega^2x_0^2, \quad \forall t$$

$$\boxed{x^2+\frac{1}{\omega^2}y^2=\frac{c}{\omega^2}}$$ ↝ έλλειψη

↳ δυναμική ενέργεια

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{c}{\omega^2}, & y=0 \\ \dfrac{1}{\omega^2}y^2=\dfrac{c}{\omega^2}, & x=0 \end{cases}$$

↳ κινητική ενέργεια

Η συνολική ενέργεια του συστήματος ισούται με τη μέγιστη δυναμική και αυτή ισούται με τη μέγιστη κινητική ενέργεια

(Βρίσκεται λοιπόν όχι μόνο τα όρια της κίνησης αλλά και της ταχύτητας)

(Εκεί που έχει μέγιστη ταχύτητα είναι κέντρο ισορροπίας)

Για ελλειπτικά φασικά διαγράμματα η κίνηση του υλικού σημείου αντιστοιχεί σε ταλάντωση. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (διότι $x(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$, δηλαδή από το σύστημα $\dot{y}=-\omega^2 x$).

Στα ακρότατα της κίνησης τόσο ως προς τον άξονα του x τόσο και ως προς τον άξονα y βρίσκω τη μέγιστη δυναμική (το ακρότατο στον άξονα x) και τη μέγιστη κινητική (το ακρότατο στο άξονα y) που και οι 2 ισούται με τη συνολική ενέργεια του συστήματος.

Από το φασικό διάγραμμα εξάγω και τα όρια της κίνησης, τόσο ως προς τη θέση τόσο ως προς τη ταχύτητα. Τα ακρότατα στον άξονα x, δίνουν τα όρια της θέσης και τα ακρότατα στον άξονα y τα όρια της ταχύτητος. Το ερώτημα που παραμένει είναι πως θα αντιστοιχίσω τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος με τα κρίσιμα σημεία και τα ακρότατα που υπάρχουν, χωρίς να λύσω πλήρως την δευτεροβάθμια εξίσωση του Νεύτωνα